

## مجموعه های هندسی

به نام خدا

به فصل ششم کتاب رسیدیم، یعنی فصل سطح و حجم هر جسم مادی که می بینیم، حجم داره، یعنی یه فضایی رو اشغال میکنه. در این فصل هدفمون اینه که با مجموعه های هندسی بیشتر آشنا بشیم. مجموعه ها به دو دسته تقسیم میشن، مجموعه های هندسی و مجموعه های غیرهندسی. مجموعه های غیرهندسی اسم و تعریف مشخصی ندارن. الان به اطرافتون نگاه کنید، کلی مجموعه می بینید که نمی تونید براشون اسم بذارید، مثل گوشی تلفن، مبل، کیف و ... اما مجموعه های هندسی اینطوری نیستن.

### مجموعه هندسی:

مجموعه های هندسی شکل های مشخص و تعریف شده دارن. مثلاً شما آله یه قوطی کبریت ببینید به راحتی می تونید بگید که این مجموعه، یک مکعب مستطیله یا آله یه لیوان داشته باشید می تونید بگید شکل این لیوان استوانه است. تا اینجا تفاوت مجموعه های هندسی و غیرهندسی رو متوجه شدیم. در ادامه می فوایم با مجموعه های هندسی بیشتر آشنا بشیم.

مجسم‌های هندسی به سه دسته اصلی تقسیم می‌شوند:

۱. منشوری

۲. کره

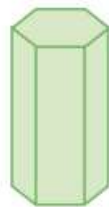
۳. هرمی

یه سری مجسم‌ها هم وجود دارند که ترکیبی از این سه تا هستند.

شکل‌های زیر نمونه‌هایی از این دسته‌بندی هستند:



حجم‌های کره



حجم‌های منشوری



حجم‌های هرمی

مجسم‌های منشوری

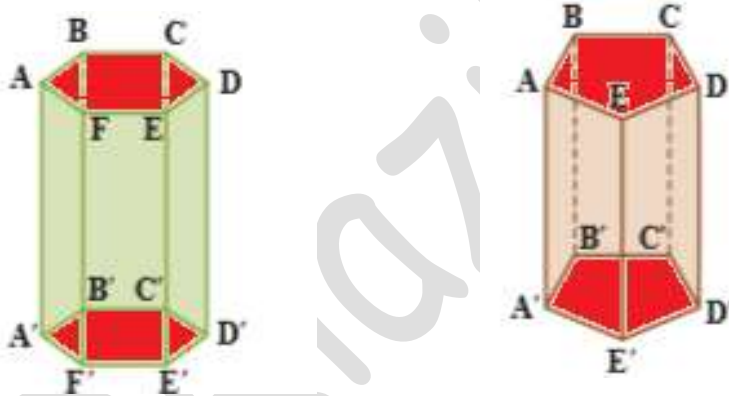
می‌توانیم بینیم مجسم‌های منشوری چه خصوصیتی دارند و چطوری می‌توانیم اون‌ها رو تشخیص بدیم.

مجسم‌های منشوری بین دو صفحه موازی قرار می‌گیرند.

با همین ویژگی می‌تونیم مجسم‌های منشوری رو از کروی و هرمی تمیز بدیم.  
 آگه به شکل‌های بالا نگاه کنید می‌بیند که مجسم‌های کروی و هرمی هیچکدوم بین دو صفحه موازی قرار نگیرفتن و فقط مجسم‌های منشوری این خصوصیت رو دارن.

حالا باید چند تا تعریف درباره مجسم‌های منشوری یاد بگیریم، توی مناسبه‌ی مجسم منشورها به این تعریف‌ها احتیاج پیدا می‌کنیم.

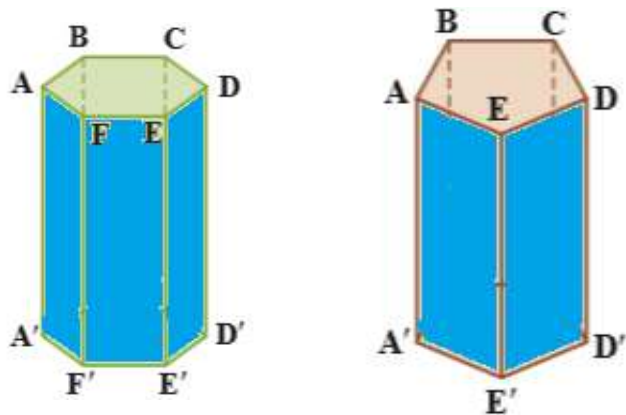
**قاعده:** به اون دو سطح موازی که مجسم‌های منشوری بینشون قرار می‌گیره، قاعده می‌گیم. در شکل‌های زیر، قاعده رو با رنگ قرمز نشون دادیم:



یه نکته مهمی که درباره قاعده‌های منشور وجود داره اینه که، چند ضلعی‌های قاعده یه منشور، شبیه به هم هستن. یعنی شما نمی‌تونید یه منشور داشته باشید که یه قاعده‌ش چهارضلعی باشه و یه قاعده‌ش پنج ضلعی. هر دو قاعده باید یکسان باشن.

**وجه‌های جانبی:** به سطح‌های اطراف مجسم منشوری، وجه جانبی گفته میشه.

در شکل‌های زیر، وجه‌های جانبی رو با رنگ آبی نشون دادیم:



**یال:** به محل برخورد سطح‌ها، یال گفته می‌شود.

در شکل‌های بالا،  $AA'$ ،  $BB'$ ،  $CC'$ ،  $DD'$ ،  $EE'$ ،  $FF'$  یال هستند.

**راس:** به محل برخورد هر ۳ سطح، راس گفته می‌شود.

در شکل‌های بالا  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ،  $D$ ،  $E$ ،  $F$ ،  $A'$ ،  $B'$ ،  $C'$ ،  $D'$ ،  $E'$ ،  $F'$  راس هستند.

**مقطع زدن:**

در اینجا می‌فروایم با مفهوم مقطع زدن آشنا بشیم. برای اینکه راحت متوجه بشید، به مثال کاربردی می‌زنیم.

تا حالا شده واسه تزیین سالاد، فیاز رو برش بدید 😊. به راهش اینه که فیاز رو به صورت شکل زیر برش بدید:



در این شکل فیار طوری برش فورده که ازش دایره به وجود اومده. آگه شما به سطح  
خیاری که برش زدید نگاه کنید، یه دایره می بینید.

هالا ممکنه بفواید یه کم شیک تر تزیین کنید و فیار رو به شکل زیر برش بزنید:



خب، هالا اینجا شکل‌های برش فورده چی هستن؟ بیضی

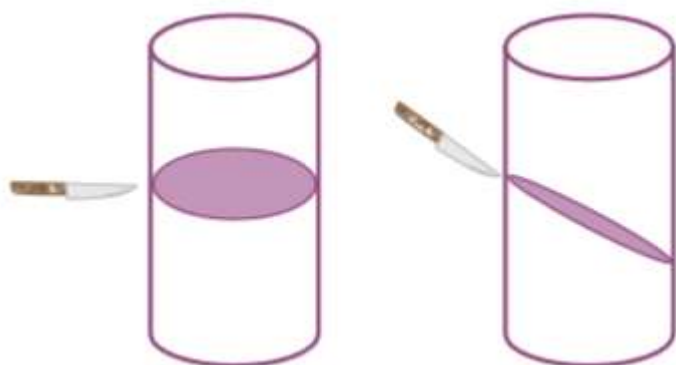
آگه به سطح خیاری که برشش زدیم نگاه کنیم چه شکلی رو می بینیم؟ بیضی

به این کاری که ما انجام دادیم مقطع زدن گفته میشه.

در واقع ما یه استوانه رو به دو حالت مختلف مقطع زدیم، یه بار که مقطع زدنمون به

صورت صاف بود، سطح مقطعی که به دست آوردیم دایره بود و یه بار که مقطع

زدنمون کج بود سطح مقطع به دست اومده بیضی شد.



این کار رو با انواع مبهم‌های هندسی میشه انجام داد.

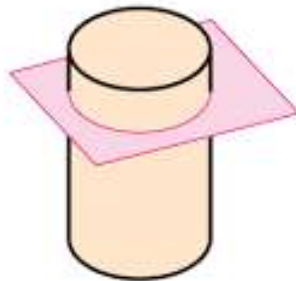
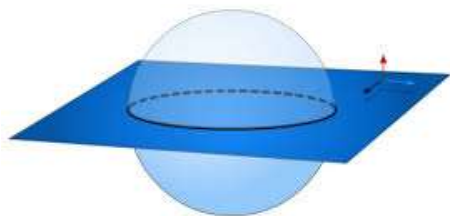
تمرین صفحه ۷۲

مبم‌های هندسی

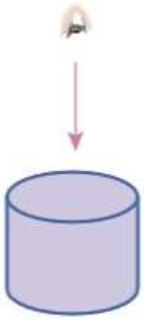
۱- آیا ممکن است مقطع یک کره و یک استوانه هم شکل باشند؟ در چه صورت؟

آیا ممکن است مقطع یک منشور و یک هرم هم شکل باشند؟

یک کره رو به هر صورتی که برش بزنییم مقطعش دایره میشه. اما استوانه رو به حالتی مفتلی میشه برش زد. آگه استوانه رو به صورتی برش بزنییم که مقطعش دایره باشه اونوقت مقطعشون با هم برابر میشه.



قسمت بعد : در صورتی که شکل قاعده منشور و هرم یکسان باشه، میشه طوری برش زد که مقطع ها با هم برابر باشه.



۲- یک استوانه از دید بالا به چه شکلی دیده می‌شود؟

یک منشور ۶ پهلو به چه شکلی دیده می‌شود؟

استوانه از دید بالا به شکل دایره دیده می‌شود.

یک منشور شش پهلو از دید بالا، به شکل یک شش ضلعی دیده می‌شود.

ادامه تمرینها رو می‌تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺

در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

ماسبه حجم‌های منشوری

در قسمت قبل با حجم‌های منشوری آشنا شدیم و یاد گرفتیم حجم منشوری همیشه که بین دو صفحه موازی قرار داشته باشه.

در این قسمت می‌فوییم حجم این شکلها رو مناسبه کنیم.

برای مناسبه حجم این شکلها باید اول **مساحت قاعده** رو به دست بیاریم و بعد اون رو **در ارتفاع ضرب** کنیم. بنابراین:

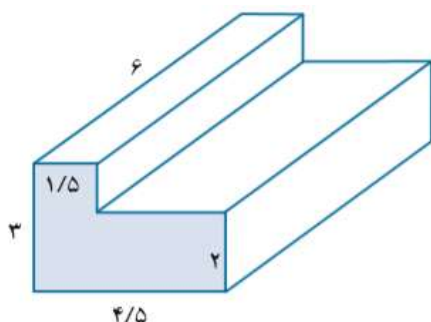
ارتفاع  $\times$  مساحت قاعده منشور = حجم منشور

تقسیم مهم توی مناسبه حجم منشور، مناسبه مساحت قاعده‌س، چون ممکنه قاعده، شکل منظمی نداشته باشه و ما مجبور باشیم برای مناسبه مساحت، اونو به چند تا شکل منظم تقسیم کنیم.

چند تا سوال حل می‌کنیم تا با نحوه مناسبه حجم آشنا بشیم.

مثال:

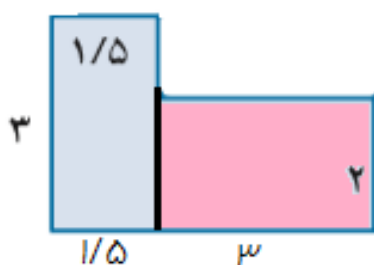
حجم شکل‌های زیر را به دست آورید:



اول از همه باید قاعده شکل رو مشخص کنیم.

قاعده شکل، یکی از همون دو صفحه موازی هست که در تعریف منشور گفتیم.

قاعده در اینجا با رنگ آبی مشخص شده. پس باید مساحت این شکل رو به دست بیاریم، قاعده رو به دو تا شکل منظم تقسیم می‌کنیم:





مساحت دو تا مستطیل رو جداگانه محاسبه می‌کنیم و با هم جمع می‌کنیم:

مستطیل آبی:

$$3 \times 1/5 = 3/5$$

مستطیل صورتی:

$$3 \times 2 = 6$$

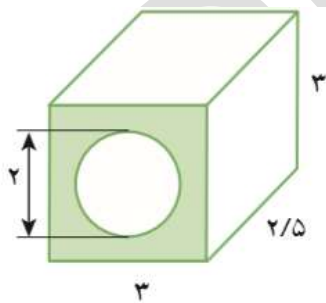
جمعشون رو حساب می‌کنیم:

$$\text{مساحت قاعده} = 3/5 + 6 = 10/5$$

مساحت قاعده رو به دست آوردیم، برای به دست آوردن حجم، باید مساحت قاعده در ارتفاع ضرب بشه:

$$\text{حجم شکل} = 10/5 \times 6 = 63$$

مثال بعد:



قاعده این شکل یه مربعه که یه دایره ازش کم شده. پس برای به دست آوردن مساحت قاعده، باید:

۱. مساحت مربع رو حساب کنیم.

۲. مساحت دایره رو حساب کنیم.

۳. اینا رو از هم کم کنیم.

مساحت مربع:

$$۳ \times ۳ = ۹$$

مساحت دایره:

برای به دست آوردن مساحت دایره به شعاعش احتیاج داریم ولی در اینجا قطر به ما داده شده، بنابراین قطر رو بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا شعاع به دست بیاد:

$$\text{شعاع دایره} = ۲ \div ۲ = ۱$$

$$\text{مساحت دایره} = ۱ \times ۱ \times ۳/۱۴ = ۳/۱۴$$

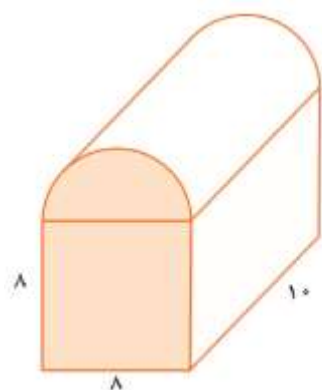
$$\text{مساحت دایره} - \text{مساحت مربع} = \text{مساحت قاعده}$$

$$\text{مساحت قاعده} = ۹ - ۳/۱۴ = ۵/۱۴$$

حالا این عدد رو در ارتفاع ضرب می‌کنیم:

$$۵/۱۴ \times ۲/۵ = ۱۴/۴۵$$

مثال بعد:



قاعده در اینجا هم به شکل منظم نیست، ولی از به نیم دایره و به مربع تشکیل شده.

مساحت نیم دایره + مساحت مربع = مساحت قاعده

$$\text{مساحت مربع} = 1 \times 1 = 1$$

برای به دست آوردن مساحت دایره، نیاز به شعاع داریم ولی در اینجا قطر به ما داده شده، پس اول قطر رو بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$\text{شعاع دایره} = 1 \div 2 = 0.5$$

$$\text{مساحت دایره} = 0.5 \times 0.5 \times \pi = 0.785$$

خب، مساحت دایره رو به دست آوردیم.

ولی ما به پی نیاز داشتیم؟ مساحت نیم دایره . پس مقدار به دست اومده رو نصف می‌کنیم:

$$0.785 \div 2 = 0.3925$$

حالا مساحت قاعده به دست میاد:

$$\text{مساحت قاعده} = 1 + 0.3925 = 1.3925$$

این عدد رو در ارتفاع ضرب می‌کنیم:

$$\text{حجم شکل} = 1.3925 \times 10 = 13.925$$

۳- جاهی به عمق ۱۲ متر حفر کرده‌ایم. شعاع دهانه این جاه ۰/۴ متر است. وقتی خاک کنده و بیرون ریخته می‌شود، حجم آن ۱/۳ برابر می‌شود. اگر خاک این جاه بعد از بیرون آمدن در سطحی به ابعاد ۴ و ۵ متر به‌طور یکنواخت ریخته شود تا یک مکعب مستطیل به وجود آید، ارتفاع این مکعب مستطیل چقدر خواهد شد؟

بیابن مساله رو تیکه تیکه حل کنیم که گیج نشیم 😊

یه چاه داریم به عمق ۱۲ و شعاع دهانه ۰/۴ ، فاک این چاه رو بیرون ریفتیم.

سوال به ما گفته حجم فاکی که بیرون ریفته میشه ۱/۳ برابر با حجم چاه هست. پس حجم چاه رو مناسبه می‌کنیم:

قاعده چاه، یه دایره به شعاع ۰/۴ هست:

$$0.14 \times 0.14 \times 3/14 = 0.5024$$

مساحت قاعده رو به دست آوردیم، اونو در ارتفاع چاه ضرب می‌کنیم:

$$6/0288 = 0.5024 \times 12 = \text{حجم چاه}$$

طبق چیزی که گفتیم، حجم فاکی که بیرون ریفته شده ۱/۳ برابر ۶/۰۲۸۸ هست. یعنی:

$$6/0288 \times 1/3 = 2/0096$$

حجم فاکی که بیرون ریفته شده رو به دست آوردیم، پس دیگه با چاه کاری نداریم.

حالا ببینیم قسمت دو مساله چی گفته؟

میفوییم با این فاکی که بیرون ریفتیم، مکعب مستطیل درست کنیم.

آیا قبول داریم حجم فاکی که داریم، با حجم شکلی که میفوییم بسازیم برابره؟

قبول داشته باشید دیگه 😊

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم مکعب}$$

قاعده به شکل مستطیل و با ابعاد ۴ و ۵ هست. بنابراین:

$$20 = 4 \times 5 = \text{مساحت قاعده}$$

مساحت قاعده رو به دست آوریم.

از طرفی گفتیم حجم شکل ساخته شده، با حجم فاکتی که بیرون ریفتیم برابره.

پس یعنی حجم مکعب برابر با  $۷/۱۳۷۴۴$  هست. این اعداد رو بگذاریم می‌کنیم تا ارتفاع شکل رو به دست بیاریم:

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم مکعب}$$

$$۷/۱۳۷۴۴ = ۲۰ \times \text{ارتفاع}$$

بنابراین:

$$۷/۱۳۷۴۴ \div ۲۰ = ۰/۳۹۱۸۷۲$$

حل تمرین صفحه ۷۵

حجم‌های منشوری

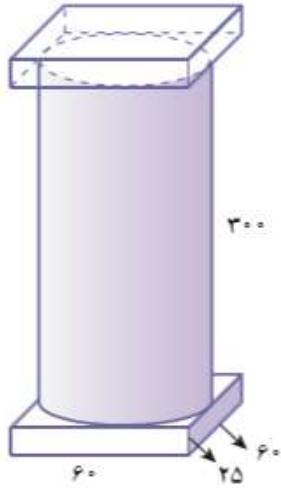
۱- حجم ستون شکل مقابل را به صورت تقریبی پیدا کنید.

(کل شکل را مکعب مستطیل و یا استوانه در نظر بگیرید.)

حالا کمی دقیق‌تر محاسبه کنید و آن را به سه قسمت تقسیم کنید و حجم سه تکه را جداگانه حساب کنید

و مجموع را به دست آورید (شعاع قاعده استوانه چند است؟).

تفاوت دو جواب را به دست آورید.



ابتدا حجم رو به طور تقریبی مناسبه می‌کنیم. فرض می‌کنیم که شکل به مکعب مستطیله.

حجم مکعب مستطیل بطوری به دست می‌آید؟

طول ضربدر عرض ضربدر ارتفاع

طول و عرض برابر 60 هستند.

ارتفاع شکل رو می‌فوییم به دست بیاریم. ارتفاع استوانه برابر

300 هست، دو تا مکعب هم بالا و پایین داریم که ارتفاع اونها برابر 25 هست. پس

ارتفاع کل شکل برابر همیشه با:

$$\text{ارتفاع شکل} = 300 + 25 + 25 = 350$$

$$\text{حجم مکعب} = 60 \times 60 \times 350 = 1260000$$

خب تا اینجا حجم تقریبی رو به دست آوردیم، حالا شکل رو به سه قسمت تقسیم می‌کنیم تا حجم دقیق شکل به دست بیاد.

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم استوانه}$$

مساحت قاعده رو می‌فوییم به دست بیاریم، دایره به قطر 60 هست. ما برای مناسبه حجم، شعاع رو لازم داریم:

$$\text{شعاع} = 60 \div 2 = 30$$

$$\text{مساحت قاعده} = 30 \times 30 \times 3.14 = 2826$$

$$\text{حجم استوانه} = 2826 \times 300 = 847800$$

حجم مکعب پایین استوانه رو به دست میاریم:

$$\text{حجم مکعب} = 25 \times 60 \times 60 = 90000$$

دو تا ای این مکعبها داریم، بنابراین حجم کل شکل برابره با:

$$\text{حجم کل شکل} = 847800 + 90000 + 90000 = 1027800$$

اینم حجم دقیق شکل بود.

سوال از ما فواسته که اختلاف این دو عدد رو به دست بیاریم:

$$1260000 - 1027800 = 232200$$

ادامه تمرینها رو میتونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺

در صورت تمایل به عضویت، به ازمین کانال مراجعه کنید.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

[www.riazibaham.ir](http://www.riazibaham.ir)

و کانالهای @RiaziBaHam و @RiaziBaHam7

برای دریافت جزوات سایر پایهها، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتفانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.